Exercice 1:

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{4}$. Par linéarité, les primitives F ont pour expression :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{8} + \frac{3x}{4} + k \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

2. On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u^3}$ avec $u : x \mapsto x^3 + 8$. les primitives F ont pour expression :

$$\forall x \in]-2; +\infty[,\ F(x) = \frac{-1}{2(x^3+8)^2} + k \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}^{3x+2} = \frac{1}{3} \times 3\mathbf{e}^{3x+2}$. On reconnaît la forme $u'\mathbf{e}^u$ avec $u : x \mapsto 3x+2$. les primitives F ont pour expression :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{3}\mathbf{e}^{3x+2} + k \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

4. $\forall x \in \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[,\ f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+1}} = 2 \times \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$. On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u : x \mapsto 3x+1$. les primitives F ont pour expression :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[,\ F(x) = 2\sqrt{3x+1} + k \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Exercice 2:

1. On reconnait la forme $\dfrac{u'}{u}$ sous l'intégrale avec $u = \exp$ dont une primitive sur $[0,1]$ est $t \mapsto \ln(|u|)$ donc

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^t}{1+\mathbf{e}^t}\mathrm{d}t = \Big[\ln(1+\mathbf{e}^t)\Big]_0^1 = \ln(1+\mathbf{e}) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+\mathbf{e}}{2}\right)$$

2. On reconnait la forme $u' \times u$ sous l'intégrale avec $u = \sin$ dont une primitive est de la forme $\dfrac{u^2}{2}$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = \frac{1}{4}$$

3. On reconnait presque la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ sous l'intégrale avec $u : t \mapsto 1 + 2t^2$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{4t}{2\sqrt{1+2t^2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+2t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\big(\sqrt{3}-1\big) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

4. Puisque $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ \tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$, on a presque la forme $\frac{u'}{u}$ sous l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\mathrm{d}t = -\Big[\ln(|\cos(t)|)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Exercice 3:

1. On reconnait la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = \ln$ donc une primitive est de la forme $\ln(|u(x)|)$ donc

$$\int_{\mathbf{e}}^{2\mathbf{e}} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = \Big[\ln(|\ln(x)|)\Big]_{\mathbf{e}}^{2\mathbf{e}} = \ln(\ln(2\mathbf{e})) - \ln(\ln(\mathbf{e})) = \ln(\ln(2\mathbf{e})) = \ln(1+\ln(2))$$

2. On reconnait la forme $u' \times u$ avec $u(x) = \ln(x)$ dont une primitive est de la forme $\dfrac{u^2}{2}$ donc

$$\int_1^{\mathbf{e}} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\mathrm{d}x = \mathfrak{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(1+i)x}\mathrm{d}x\right) = \mathfrak{Re}\left(\left[\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) &= \mathfrak{Re}\left(\frac{1-i}{2}(e^{(1+i)\frac{\pi}{2}} - e^{(1+i)0})\right)\\ &= \mathfrak{Re}\left(\frac{1-i}{2}(ie^{\frac{\pi}{2}} - 1)\right)\\ &= \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}\end{aligned}$$

Exercice 4:

1. Les fonctions $u = \ln$ et $v : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;2]$ et par la formule de l'intégration par parties,

$$\int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x = 2\ln(2) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$$

2. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{3x+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et par la formule de l'intégration par parties,

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = \left[\frac{2x}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\mathrm{d}x = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{3x+1}\mathrm{d}x$$

Or, $x \mapsto \dfrac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{3x+1}$ sur $[0,1]$ donc

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{27}(8-1) = \frac{8}{27}$$

3. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v = -\cos$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;2]$ et par la formule de l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\sin(x)\mathrm{d}x &= \Big[-x\cos(x)\Big]_1^2 - \int_1^2(-\cos(x))\mathrm{d}x = -2\cos(2) + \cos(1) + \Big[\sin(x)\Big]_1^2\\ &= -2\cos(2) + \cos(1) + \sin(2) - \sin(1)\end{aligned}$$

4. On fait encore une intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\int_1^2 x^2\mathbf{e}^x\mathrm{d}x = \Big[x^2\mathbf{e}^x\Big]_1^2 - 2\int_1^2 x\mathbf{e}^x\mathrm{d}x = 4\mathbf{e}^2 - \mathbf{e} - 2\int_1^2 x\mathbf{e}^x\mathrm{d}x$$

On fait une seconde intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\int_1^2 x^2\mathbf{e}^x\mathrm{d}x = 4\mathbf{e}^2 - \mathbf{e} - 2\left([x\mathbf{e}^x]_1^2 - \int_1^2 \mathbf{e}^x\mathrm{d}x\right) = 4\mathbf{e}^2 - \mathbf{e} - 2\left(2\mathbf{e}^2 - \mathbf{e} - \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}\right) = 2\mathbf{e}^2 - \mathbf{e}$$

Exercice 5:

1. On cherche la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^t x\,\mathrm{Arctan}(x)\mathrm{d}x$.
   On applique la formule de l'intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int_0^t x\,\mathrm{Arctan}(x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\,\mathrm{Arctan}(x)\right]_0^t - \int_0^t \frac{x^2}{2(1+x^2)}\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2}\,\mathrm{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{t^2}{2}\,\mathrm{Arctan}(t) - \frac{1}{2}\left[x - \mathrm{Arctan}(x)\right]_0^t = \left(\frac{t^2+1}{2}\right)\mathrm{Arctan}(t) - \frac{t}{2}\end{aligned}$$

2. On cherche la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^t \mathrm{Arcsin}(x)\mathrm{d}x$.
   On applique la formule de l'intégration avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $t \in]-1;1[$.

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathrm{Arcsin}(x)\mathrm{d}x &= [x\,\mathrm{Arcsin}(x)]_0^t - \int_0^t \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = t\,\mathrm{Arcsin}(t) + [\sqrt{1-x^2}]_0^t \\ &= t\,\mathrm{Arcsin}(t) + \sqrt{1-t^2} - 1\end{aligned}$$

3. On cherche la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_1^t \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
   On applique la formule de l'intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_1^t \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^t - \int_1^t \frac{2\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x = 2\sqrt{t}\ln(t) - 2\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{t}\ln(t) - 4\sqrt{t} + 4.$$

Exercice 6: Soit $a > 0$.

$$\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{x}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

On sait calculer la première intégrale. Pour la seconde, on effectue le changement de variable $\mathscr{C}^1$ suivant : $u = \dfrac{1}{x}$.

$$\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}[\ln(x)]_{\frac{1}{a}}^a - \int_a^{\frac{1}{a}} u\,\mathrm{Arctan}(u)\frac{-\mathrm{d}u}{u^2} = \pi\ln(a) - \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\mathrm{Arctan}(u)}{u}\mathrm{d}u$$

D'où, $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi\ln(a)}{2}$.

Exercice 7:

1. On doit étudier le polynôme $P(x) = x^2+2x+1 = (x+1)^2$. Or, la fonction $F(x) = \dfrac{-1}{x+1}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ sur l'intervalle $[0,1]$ donc

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1} = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{1} = \frac{1}{2}$$

2. Soit $x \in [0,1]$.

$$\frac{2x+1}{x^2+2x+1} = \frac{2x+2-1}{x^2+2x+1} = \frac{2x+2}{x^2+2x+1} - \frac{1}{x^2+2x+1}.$$

Par la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x \\ &= \Big[\ln(|x^2+2x+1|)\Big]_0^1 - \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = \ln(4)-\ln(1)+\left(\frac{1}{2}-1\right) = \ln(4)-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. On utilise la formule de changement de variables avec le changement de variable $\mathscr{C}^1$ suivant : $u = x^3$.

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+(u)^2}\mathrm{d}u = \Big[\mathrm{Arctan}(u)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

4. On utilise le changement de variables $\mathscr{C}^1$: $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ qui donne $\mathrm{d}u = \dfrac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}\mathrm{d}x = \dfrac{1+u^2}{2}\mathrm{d}x$.
De plus, $\cos(x) = \cos(2\,\mathrm{Arctan}(u)) = 2\cos^2(\mathrm{Arctan}(u)) - 1 = 2\dfrac{2}{\tan'(\mathrm{Arctan}(u))} - 1 = \dfrac{2}{1+u^2} - 1 = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\cos(x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{5+3\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\int_0^1 \frac{1}{5(1+u^2)+3(1-u^2)}\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2/4}\mathrm{d}u$$

Or, $u \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{u}{2}\right)$ est une primitive de $u \mapsto \dfrac{1}{4(1+u^2/4)}$ sur $[0;1]$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\cos(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{4+u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{u}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exercice 8:

1. On cherche la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_1^t \frac{2}{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.
On utilise la formule de changement de variables avec le changement de variable $\mathscr{C}^1$ suivant : $u = \mathbf{e}^x$.

$$\int_1^t \frac{2}{\mathbf{e}^x-\mathbf{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}^t} \frac{2\mathrm{d}u}{u(u-\frac{1}{u})} = \int_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}^t} \frac{2\mathrm{d}u}{u^2-1} = \int_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}^t} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = [\ln(|u-1|) - \ln(|u+1|)]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e}^t}$$

Donc, $t \mapsto \ln(\mathbf{e}^t - 1) - \ln(\mathbf{e}^t+1)$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}(t)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On cherche la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$.
On applique la formule de changement de variables avec le changement de variable $\mathscr{C}^1$ suivant : $u = \sqrt{x}$.

$$\int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{t}} \frac{2u\mathrm{d}u}{u+u^3} = 2\int_1^{\sqrt{t}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

Donc, $t \mapsto 2\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{t})$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On cherche la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x$.
On applique la formule de changement de variables avec le changement de variable $\mathscr{C}^1$ suivant $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
On utilise également le fait que $\sin(2\,\mathrm{Arctan}(u)) = 2\sin(\mathrm{Arctan}(u))\cos(\mathrm{Arctan}(u)) = \frac{2u}{1+u^2}$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x = \int_1^{\tan(t/2)} \frac{1}{\sin(2\,\mathrm{Arctan}(u))}.\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_1^{\tan(t/2)} \frac{1+u^2}{2u}.\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_1^{\tan(t/2)} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

Donc, $t \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)\right)$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sin(t)}$ sur $]0,\pi[$.

Exercice 9:

1. $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_1 = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \mathrm{d}t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n(u)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(u)\mathrm{d}u$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour calculer W_{n+2} on va utiliser une intégration par parties avec $\begin{cases} u : t \mapsto \sin(t) \\ v : t \mapsto (\cos(t))^{n+1} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u' : t \mapsto \cos(t) \\ v' : t \mapsto -(n+1)\sin(t)(\cos(t))^n \end{cases}$

$$\begin{array}{rcl}
W_{n+2} & = & \left[\sin(t)(\cos(t))^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2(\cos(t))^n \mathrm{d}t \\
& = & (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t)^2)(\cos(t))^n \mathrm{d}t \\
& = & (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \mathrm{d}t - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} \mathrm{d}t \\
W_{n+2} & = & (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \\
W_{n+2} & = & \dfrac{n+1}{n+2} W_n
\end{array}$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} W_{2p-4} = ... = \frac{(2p-1)(2p-3)...1}{2p(2p-2)...2} W_0$$

   Au numérateur, on reconnaît le produit de tous les nombres impairs entre 1 et $2p-1$.
   Au dénominateur, on reconnaît le produit de tous les nombres pairs entre 2 et $2p$.
   On multiplie le numérateur et le dénominateur par le produit de tous les nombres pairs entre 2 et $2p$.

$$W_{2p} = \frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)...1}{(2p(2p-2)...2)^2} W_0 = \frac{(2p)!}{(2p(2p-2)...2)^2} \frac{\pi}{2}$$

   Or, $(2p(2p-2)...2) = 2^p \times p(p-1)...1 = 2^p \times p!$. Finalement,

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

   On va faire le même travail avec les indices impairs.

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} = \frac{2p(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} W_{2p-3} = ... = \frac{2p(2p-2)...2}{(2p+1)(2p-3)...1} W_0$$

   On multiplie le numérateur et le dénominateur par le produit de tous les nombres pairs entre 1 et $2p+1$ et on obtient

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lcl}
\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[& , & 0 < \cos(t) < 1 \\
\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[& , & 0 < (\cos(t))^{n+1} < (\cos(t))^n \text{ on a multiplié par } \cos(t)^n > 0
\end{array}$$

En intégrant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient

$$0 < W_{n+1} < W_n$$

La suite (W_n) est donc décroissante.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_{n+2}} \leqslant \frac{W_n}{W_{n+2}}$$

Or, $\dfrac{W_n}{W_{n+2}} = \dfrac{n+2}{n+1}$ donc par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_{n+2}} = 1$.

5.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = W_{n+1}(n+2)W_{n+2} = W_{n+1}(n+1)W_n = (n+1)W_nW_{n+1}$$

La suite $((n+1)W_nW_{n+1})$ est donc constante. Le premier terme vaut $W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_nW_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$. D'où $nW_{n+1}W_n \leqslant nW_n^2 \leqslant nW_{n-1}W_n$ i.e. $\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2} \leqslant nW_n^2 \leqslant \frac{\pi}{2}$.
D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$